**נושא 10 – מבוא לתורת הגרפים**

**גרף** הוא אוסף כל הנקודות והקווים (לא בהכרח ישרים) המחברים זוגות של נקודות (לא בהכרח שונות), הנקודות נקראות קודקודים (או צמתים), והקווים נקראות צלעות (או קשתות).

סימון הגרף , כאשר:

*– קבוצת קודקודים של ,*

*– קבוצת הצלעות של .*

*ניתן לייצג את צלעות הגרף כזוגות (סדורים או אי סדורים) של הקדקדים. הוא צלע בין קודקוד לבין .*

* *בגרף מכוון הסדר חשוב ומציירים חצים בצלעות.*
* *בגרף לא מכוון אין חשיבות לכיוון הצלעות.*
* *קודקוד מבודד קודקוד שאף צלע לא יוצאת ממנו.*

***לולאה***  *– צלע היוצאת מאותו קודקוד וחוזרת אליו (מחברת שני קודקודים שונים).*

***גרף בעל צלעות מקבילות*** *– גרף שיש בו לפחות 2 קודקודים המחוברים ע"י יותר מצלע אחת.*

***דרגה*** *– דרגה של קודקוד (או סדר של קודקוד) , היא מספר הצלעות היוצאות ממנו, בגרף לא מכוון הדרגה של קודקוד היא מספר צלעות המחוברות לקודקוד, לולאה תורמת 2 לדרגה של קודקוד, דרגה של קודקוד מבודד היא 0.*

***משפט 1:***

*מגרף לא מכוון בעל קוקודים: ו- צלעות סכום דרגות הקודקודים שווה לפעמיים מספר הצלעות:*

*הוכחה:*

*נספור לכל הקודקוד את מספר הצלעות המחוברות אליו, כלומר נספור את כל הדרגות.*

*כל צלע תספור פעמיים – עבור ועבור , ומכאן מתקבל השיוויון.*

***דוגמה:***

*( = מספר הצלעות)*

*( = מספר כל הדרגות)*

***דוגמה נוספת:***

***מסקנה:***

*בכל גרף לא מכוון מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא מספר זוגי.*

*הוכחה:*

*נפרק את קבוצת קדקודי הגרך לשתי קבוצות זרות: , , מורכבת מקודקודים בעלי דרגה זוגית, ו- מורכבת מקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית, לכן:*

*סכום דרגות בקבוצת – זוגי, הוא מספר זוגי, ולכן דרגות בקבוצה הוא זוגי.*

***דוגמא:***

*דרגות אי-זוגיות:*

*דרגיות זוגיות:*

***עוד מושגים:***

* ***גרף פשוט*** *– גרף יקרא פשוט אם הוא חסר לולאות וחסר צלעות מקבילות.*
* ***מסלול*** *– סדרת קודקודים בגרף בה כל שני קודקודים סמוכים מחוברים ע"י צלע בגרף.*
* ***אורך מסלול*** *– אורך של מסלול הוא מספר צלעות שבו.*
* ***מסלול פשוט*** *– מסלול שכל קודקודיו שונים.*
* ***מעגל***  *– מסלול סגור בגרף (מתחיל ומסתיים באותו קודקוד) סימון: .*
* ***גרף קשיר*** *– גרף בו בין כל 2 קודקודים יש לפחות מסלול אחד.*
* ***גרף לא קשיר***  *– גרף בו לפחות 2 קודקודים שאין בהם ל מסלול.*
* ***רכיב קשירות*** *– תת-גרף קשיר של גרף לא קשיר.*

**עצים:**

*עץ – הוא גרף פשוט, לא מכוון, קשיר חסר מעגלים, מסומן ב-:*

***עלה*** *– קודקוד בעל דרגה 1, בגרף הקודקודים הם עלים.*

***משפט 2:***

*בכל עץ בין כל שני קודקודים שונים בעץ יש מסלול אחד בלבד.*

*הוכחה:*

*נניח בשלילה שבין שני קודקודים שונים בעץ יש שני מסלולים שונים (כחול ואדום).*

*נמחק את הצלעות המשותפות, נקבל מעגל – סתירה להגדרת העץ, לכן העץ בין שני קודקודים יש מסלול אחד בלבד.*

***משפט 3:***

*לכל עץ יש לפחות עלה אחד.*

*הוכחה:*

*נניח בשלילה שלעץ אין עלים, לכן דרגה של כל קודקוד , ניקח קודקוד כלשהו, בגלל שדרגתו גדולה או שווה ל-2 נעבור לקודקוד הבא, אם כבר ביקרנו אותו סגרנו מעגל, אם לא בגלל שדרגתו גדולה או שווה ל-2 נעבור לקודקוד הבא, מכיוון שמספר קודקודי העץ סופי, באיזה שהוא שלב נגיע לקודקוד שכבר ביקרנו אותו – סגרנו מעגל, סתירה להגדרת העץ, לכן לכל עץ יש לפחות עץ אחד.*

***משפט 3 :***

*לכל עץ יש לפחות 2 עלים.*

*הוכחה:*

*ניקח מסלול ארוך ביותר בין שני קודקודי העץ: .*

*הוא מסלול פשוט ו- עלה מכיוון שאם הדרגה שלו הייתה לפחות 2 ניקח את הסמוך אליו, נסמן אותו ב-, לא יכול להיות שייך ל- (אין מעגלים), אם לא שייך ל= קיבלנו מסלול ארוך מ- – סתירה, לכן עלה.*

*בדומה ניתן להוכיח כי – הקודקוד האחרון במסלול הוא גם עלה.*

***משפט 4:***

*לכל עץ בעל קודקודים יש בדיוק צלעות.*

*הוכחה:*

*נוכיח את המשפט באינדוקציה לפי מספר קודקודי העץ.*

1. *בסיס האינדוקציה: אז יש אפס צלעות כנדרש, אז יש צלע אחת כנדרש.*
2. *הנחת האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור קודקודים – לעץ בעל קודקודים יש צלעות בדיוק.*
3. *של האינדוקציה: לעץ יש קודקודים, נוכיח כי יש לו צלעות,*

*נבחר עלה כלשהו ונמחק אותו יחד עם הצלע היחידה שמחוברת אליו, נקבל עץ בעל קודקודים ו- צלעות (לפי הנחת האינדוקציה) לכן לעץ המקורי שהוא בעל קודקודים יש צלעות.*